

NÚMEROS

Revista de Didáctica de las Matemáticas

<http://www.sinewton.org/numeros>

ISSN: 1887-1984

Volumen 98, julio de 2018, páginas 133-151

MATES: Rúbrica para el cuaderno de matemáticas

Andrés Martín Sánchez

Instituto de Enseñanza Secundaria Emilio Jimeno-Calatayud. España

*Fecha de recepción: 10 de diciembre de 2016**Fecha de aceptación: 04 de junio de 2018*

Resumen

La evaluación de la asignatura de Matemáticas en los primeros años de Secundaria incluye las producciones escritas del alumno, que se recogen en su cuaderno de clase. En este artículo, se propone una rúbrica para la valoración de dicho cuaderno, que incluye cinco apartados: la M referido al modelo del cuaderno (el formato de la rúbrica), la A de apuntes de clase, la T de trabajos matemáticos, la E de ejercicios y la S de solución de problemas. Dichas iniciales configuran el acrónimo MATES, que se convierte no sólo en un medio rápido, sencillo y eficaz de la corrección de dicha producción escrita, sino también en una guía para el alumnado para su realización. En el último de los apartados se ilustran las distintas representaciones de datos para los problemas y su resolución en pasos.

Palabras clave

Rúbrica, Cuaderno de Matemáticas, Modelo, Apuntes, Trabajos matemáticos, Ejercicios, Solución de problemas, Sistemas de representación, Pensamiento Visual

Title

MATES: A rubric for the evaluation of the maths notebook

Abstract

The evaluation of the Maths subject in the first years at High School includes the written productions of the scholars, which are gathered in their class notebook. In this article, we propose a template for the evaluation of the maths notebook including five parts: M (notebook Model), A (notes tAking), T (math Topics), E (Exercises), S (problem Solving). These initials form the acronym MATES (Spanish word for MATHS), which this way is conversed not only into a quick, simple and efficient way of the correction of this written production, but also in a scholar guide for the notebook. In the last part we show some examples of different data representation for the problems and its division in parts.

Keywords

Template, Math notebook, Evaluation, Model, Notes, Maths topics, Exercises, Problem solving, Systems of representation, Visual Thinking

1. Introducción

Durante los primeros cursos de Educación Secundaria (primero, segundo y tercero de la ESO), las programaciones didácticas del Departamento de Matemáticas, recogen la valoración del cuaderno del alumno como un procedimiento de evaluación de la asignatura. Algunos autores, lo encuadran dentro de la evaluación de seguimiento (Alsina, 1998, p. 204) o como ejemplo de evaluación sumativa (Giménez, 1997, p.263).

La evaluación en educación se integra así dentro del currículo y “permite y plantea un enfoque directo en el aula, para obtener información constante de ella” (Giménez, 1997, p.16).



**Sociedad Canaria Isaac Newton
de Profesores de Matemáticas**

Según el currículo “la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado de la Educación Secundaria obligatoria será continua y diferenciada según las distintas materias del currículo. Los profesores evaluarán a sus alumnos teniendo en cuenta los diferentes elementos del currículo.”

Otros instrumentos de evaluación comprenden la actitud en clase, el trabajo diario y fundamentalmente las pruebas escritas o exámenes.

En este artículo, se presenta una herramienta para la valoración de dichas producciones, permitiendo al profesor una valoración rápida del cuaderno del alumno y al alumno una guía del modo en que debe presentar el cuaderno al profesor.

Primeramente, se presenta dicha rúbrica junto con consideraciones acerca de las rúbricas.

Posteriormente, se presenta el resto de apartados de dicha rúbrica, como instrumento de valoración de los apuntes de clase, los ejercicios y los trabajos realizados en la asignatura.

Tal como aparece en el currículo, “en todos los cursos se ha incluido un bloque de contenidos comunes que constituye el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca. Este bloque hace referencia expresa, entre otros, a un tema básico del currículo: la resolución de problemas.”

El último de los apartados del cuaderno se refiere precisamente a este elemento respondiendo al criterio de evaluación de cada curso que tal como aparece en el currículo evalúa el “utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo, y comprobar la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución”.

Esta rúbrica se ha aplicado con éxito en la evaluación de los primeros cursos de la E.S.O. en los Institutos, IES Sierra de Ayllón (Ayllón-Segovia) durante el año 2010-2011, IESO Villa del Moncayo (Ólvega-Soria) durante el año 2013-2014 y el IES Emilio Jimeno de Calatayud (Zaragoza) durante los cursos 2014-2015, 2015-2016 y 2017-2018.

2. MATES: Propuesta de rúbrica para el cuaderno de matemáticas

En educación, “una *rúbrica* es un conjunto de criterios o de parámetros desde los cuales se juzga, valora, califica y conceptúa sobre un determinado aspecto del proceso educativo”. (Martínez-Rojas, 2008, p. 129).

En Internet existen recursos que permiten automatizar y personalizar la rúbrica¹ aplicados a distintos contextos, uno de los cuales es la resolución de problemas matemáticos.

Aquí, se propone la rúbrica para la valoración del cuaderno matemático del alumno que tiene la particularidad de estar basada en la experiencia y la disposición de los apartados a evaluar según las iniciales de la asignatura, según se muestra en la Figura1.

¹ <http://rubistar.4teachers.org/index.php>.

RÚBRICA CUADERNO MATEMÁTICAS. CURSO 201X-201X. I.E.S.				CURSO : E.S.O.				
	PROCEDIMIENTO EVALUACIÓN	CRITERIOS EVALUACIÓN- CRITERIO CALIFICACIÓN			PUNTUACIÓN			
		Excelente (2)	Satisfactorio (1)	Deficiente (0)	I	1ª	2ª	3ª
M	Modelo cuaderno	Cuaderno con todas las hojas e independiente para la asignatura. Cuaderno con separaciones en apartados diferenciados (MATES). Presentación ordenada, con sensación de armonía.	Cuaderno con todas las hojas, formato sin separaciones. Cuaderno que se comparte con otras asignaturas o que no incluye todos los apartados. Presentación correcta, pero sin sensación de armonía.	No hay cuaderno o el cuaderno no tiene apenas hojas y/ o no incluye apartados. La presentación del cuaderno es claramente sucia, con borrones.				
A	Apuntes de clase	Ha tomado nota de las explicaciones del profesor cuando este lo ha requerido la mayoría de las veces o todas las veces. Añade también reflexiones personales. Se dedica un apartado específico para estas anotaciones.	Ha tomado nota de las explicaciones del profesor sólo algunas veces. Se toma nota de las explicaciones pero no en un apartado diferenciado del cuaderno.	Apenas ha tomado nota o no ha tomado nota de las explicaciones o correcciones del profesor. No hay apartado de apuntes de clase.				
T	Trabajos matemáticos	El apartado está completo en cada uno de los trabajos que ha pedido el profesor, con un trabajo por cada hoja y con información completa, detallada y con una presentación con sensación de armonía.	El apartado de trabajos existe, y se han completado algunos de las partes pedidas por el profesor, pero de una manera incompleta o mejorable, o no se dedica una hoja por trabajo.	No hay apartado, o el apartado está claramente incompleto.				
E	Ejercicios	Se han resuelto la mayoría de los ejercicios mandados como tareas. Los ejercicios están autocorregidos con la notación pedida (✓/x). La presentación es clara y armónica.	Se han resuelto parte de los ejercicios mandados para casa y/o hay autocorrecciones, pero son escasas o insuficientes.	No se han resuelto los ejercicios mandados para casa, o apenas se han resuelto. No hay autocorrección alguna.				
S	Solución problemas	Idealmente, la resolución de problemas está dividido en cada uno de los pasos que indica el profesor. Dichos pasos encabezan la hoja en formato horizontal. Se han resuelto la mayoría de los problemas pedidos por el profesor.	Se han resuelto parte de los problemas pedidos para casa, pero no se divide la resolución en los pasos pedidos ni el formato horizontal.	No hay apartado de resolución de problemas, o el apartado está claramente incompleto.				

OBSERVACIONES Es imprescindible la conservación y presentación de esta rúbrica para la evaluación del cuaderno. En caso contrario, la puntuación del cuaderno es un 0. Sólo la puntuación final, tiene validez para la ponderación en la calificación correspondiente a cada evaluación

--	--	--

NOMBRE Y APELLIDOS

Figura 1. Rúbrica del cuaderno de mates

Tal como se aprecia en la figura, la rúbrica consta de cinco apartados cada uno de los cuales, con una valoración máxima de dos puntos, de modo que la suma de dichas puntuaciones máximas es 10. Esta rúbrica tiene cuatro valoraciones a lo largo del curso, una inicial (I) que no tiene validez de cara a la valoración de la evaluación, y sirve para que el alumno conozca los puntos débiles de su cuaderno y los mejore a lo largo de las tres valoraciones siguientes (una por evaluación).

Como posibilidad, la valoración de la rúbrica puede modificarse con unos pesos variables según los apartados. Por ejemplo, en lugar de una valoración igual para cada apartado (2-2-2-2-2), puede proponerse una valoración 1-2-1-3-3 proporcionando mayor peso a los dos últimos apartados del cuaderno (ejercicios y solución de problemas) en detrimento de otros apartados como los trabajos matemáticos a los que se les dedica menos tiempo en la asignatura.

A continuación, se detalla cada uno de los apartados de dicha rúbrica.

M-Modelo del cuaderno

El primer apartado de valoración del cuaderno es precisamente el propio modo en que dicho cuaderno está organizado, es decir el **Modelo** del mismo. En este apartado se describen los cinco apartados en que estará dividido el cuaderno y la necesidad de una separación de dichos apartados.

La misma rúbrica es parte de este primer apartado. El alumno ha de conservar esta rúbrica a lo largo de todo el curso para la valoración del cuaderno en las distintas evaluaciones.

En la valoración del cuaderno este apartado pondera un 20% de la nota del cuaderno (2 puntos) y dentro de la rúbrica se detallan los criterios de calificación para esta parte del cuaderno:



- Una puntuación de 2 (excelente) se alcanza cuando el cuaderno tiene todas las hojas y es independiente para la asignatura, tiene separaciones en apartados diferenciados (MATES) y existe una presentación ordenada, con sensación de armonía.
- Una puntuación de 1 (satisfactorio) se alcanza si el cuaderno contiene todas las hojas, aunque sin separaciones, si el cuaderno se comparte con otras asignaturas o no incluye todos los apartados y si la presentación es correcta, pero sin sensación de armonía.
- Una puntuación de 0 (deficiente) se adjudica si no hay cuaderno o el cuaderno no tiene apenas hojas y/ o no incluye apartados. La presentación del cuaderno es claramente sucia, con borrones.

En este apartado, el alumno ha de ubicar la rúbrica de corrección que el profesor ha proporcionado al principio del curso tal como se muestra en la Figura 1 y una portada de la asignatura.

El soporte para la realización del cuaderno puede ser bien una carpeta con separadores en que se van añadiendo las hojas según se van produciendo, o bien la agrupación en anillas, de las que existen en el mercado con apartados diferenciados en colores:

- La primera opción tiene la ventaja de que el alumno no tiene que preocuparse de distribuir el cuaderno, simplemente va añadiendo las hojas según se vayan completando en los apartados correspondientes.
- La segunda opción requiere una distribución previa de las hojas que puede considerarse también una ventaja pues ayuda al alumno a planificar desde el principio la distribución del cuaderno. En la tabla 1 se recoge una propuesta para la distribución de dicho cuaderno.

Apartado	M-Modelo	A-Apuntes	T-Trabajos	E-Ejercicios	S-Solución problemas
Hojas (80)	2	10	5	20	20

Tabla 1. Previsión de hojas por apartado del cuaderno en espiral

Aunque a efectos estéticos la rúbrica exija que haya separación en apartados para poder configurar el acrónimo MATES, a nadie se le escapa que un cuaderno ordenado de otra manera en que todos los apartados estén completos por temas, es decir, con una elaboración lineal en que los apuntes se alternan con los ejercicios y los problemas también puede cumplir con los mismos criterios de calidad. Esto puede ser el caso en un cuaderno en espiral. En este caso, se recomienda flexibilidad en el criterio de corrección y asignar la máxima puntuación al cuaderno con todos los apartados aunque en diferente orden al consignado.

A-Apuntes de clase

En este apartado se valora la toma de Apuntes del alumno de las explicaciones del profesor. Los apuntes a los que se refiere este apartado, pueden ser ampliaciones de las explicaciones del libro, resoluciones alternativas a los ejercicios, fechas de exámenes, criterios de calificación o reflexiones personales que le ayudan a estudiar (por ejemplo, si un estudiante apunta de la pizarra " $a^0=1$ ", se podría plantear, ¿Por qué?, y añadir al margen " $1=a/a=a1-1=a^0$ ", un cuadro formulario de las propiedades de las potencias,...)

En la Figura 2 se ilustra un ejemplo de una hoja de apuntes de la asignatura.

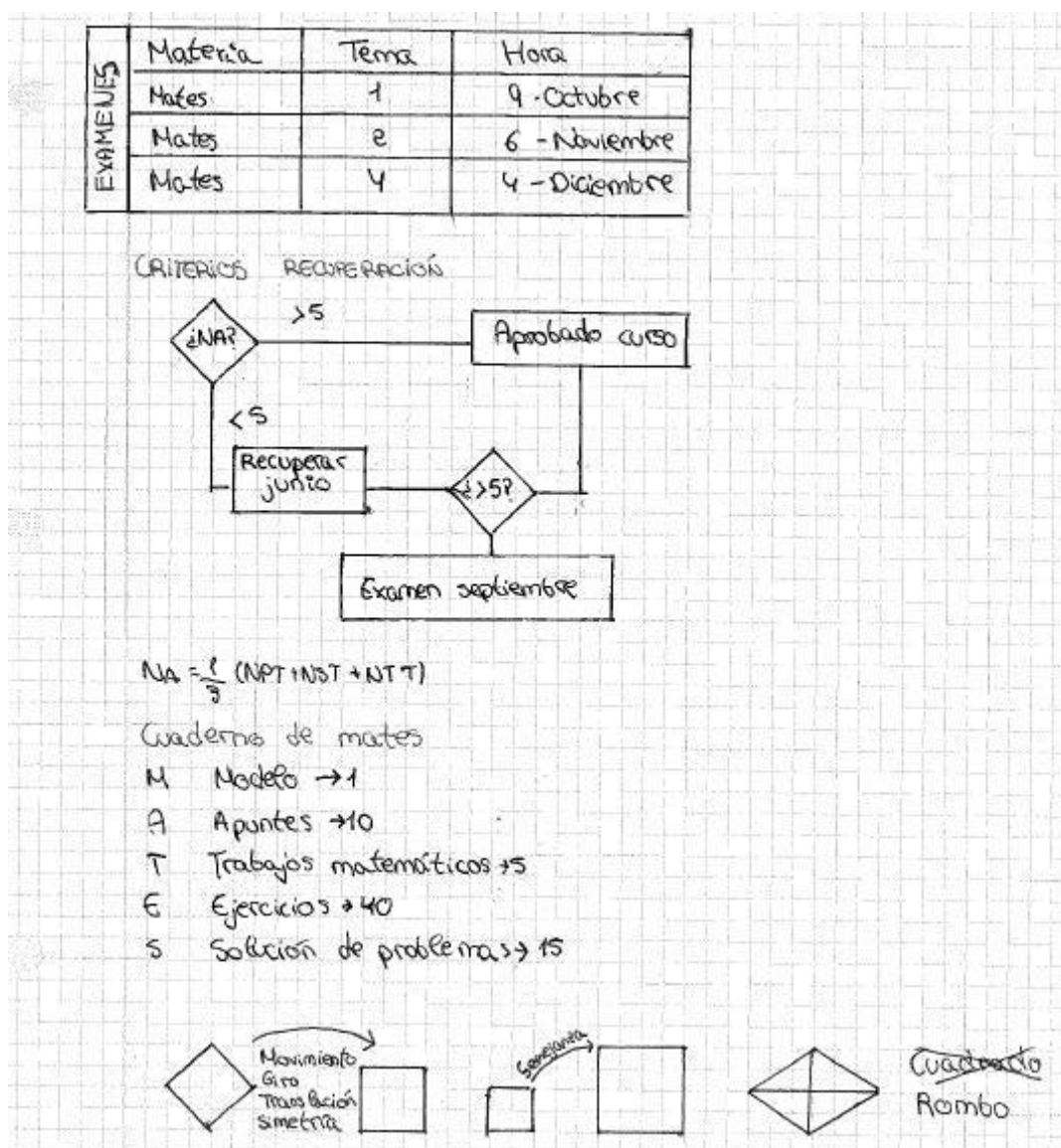


Figura 2. Ejemplo de una hoja de apuntes de la asignatura

Se establecen tres posibles puntuaciones de este apartado:

- Una puntuación de 2 (excelente) se alcanza si el alumno ha tomado nota de todas las explicaciones del profesor cuando el profesor así lo ha requerido y/o incluye comentarios personales.
- Una puntuación de 1 (satisfactorio) se alcanza si el alumno ha tomado nota de algunas de las explicaciones del profesor.
- Una puntuación de 0 (deficiente) se aplica si el alumno no ha tomado notas o apenas las ha tomado cuando el profesor así lo ha requerido.

Para una valoración objetiva de este apartado, es conveniente que el profesor anote en el cuaderno del profesor, los apuntes que ha mandado tomar a los alumnos y el día en que ha pedido dichos apuntes. En su defecto, el cuaderno de un alumno aplicado puede tomarse como patrón de corrección.



T-Trabajo matemático

Un modo de estimular la autonomía e iniciativa personal del alumno, su expresión oral, y su hábito de elaboración de trabajos, es la presentación de los mismos (manuscritos o no) y su exposición oral en clase. Estos trabajos, pueden ser individuales o en grupos.

La exposición (voluntaria o no) de dichos trabajos sirve de guía a los alumnos para cumplimentar este apartado del cuaderno. Estos trabajos independientemente de quien los elabore y exponga, han de copiarse en el cuaderno del alumno, como requisito para la valoración de este apartado.

Debe incluir:

- Un título del acordado con el profesor relativo a los contenidos de la asignatura.
- Una descripción del apartado ocupando el grueso del trabajo.
- La bibliografía, la relación con los contenidos de la asignatura y algún anexo.

El formato es una hoja por las dos caras.

Los trabajos a realizar pueden tratar sobre cualquier tema relacionada con la asignatura, como por ejemplo:

- Las potencias apocalípticas
- Los números y los Simpson.
- Los Simpson y el último teorema de Fermat
- La geometría del ajedrez
- El problema de Monty Hall
- Las matemáticas de la vida cotidiana.

Los criterios de calificación de este apartado, como en el resto de apartados, tiene tres valoraciones:

- Así, la máxima puntuación se otorga a aquel cuaderno que incluya todos los trabajos expuestos en clase, con un trabajo por cada hoja e incluyendo todos los apartados del trabajo (título, descripción, bibliografía, relación con contenidos y anexos).
- Una puntuación de 1 se otorgará si el apartado de trabajos existe, y se han completado algunos de las partes pedidas por el profesor, pero de una manera incompleta o mejorable, o no se dedica una hoja por trabajo.
- Una puntuación de 0 (deficiente) si no hay apartado, o está claramente incompleto.

E-Ejercicios

En este apartado del cuaderno se recogen los ejercicios realizados en clase y los mandados como tarea.

Los procedimientos de evaluación y criterios de calificación son los siguientes:

- La valoración será máxima (2) si se han resuelto la mayoría de los ejercicios mandados como tareas, los ejercicios están autocorregidos con la notación pedida ($\sqrt{\quad}$ / x), la presentación es clara y armónica.
- La valoración es regular (1) si se han resuelto parte de los ejercicios mandados para casa y/o hay autocorrecciones, pero son escasas o insuficientes.
- Finalmente, la valoración es insuficiente (0) si no se han resuelto los ejercicios mandados para casa, o apenas se han resuelto y/o no hay autocorrección alguna.

En la Figura4 se ilustra un ejemplo del apartado de ejercicios.

Tema 2: potencias, raíces y aproximaciones

Página 42. ACTIVIDADES

4. Reduce a una sola potencia.

a) $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4 = 4^8$ b) $(5^6)^3 = 5^{18}$ c) $\frac{7^6}{7^4} = 7^2$

d) $\frac{15^3}{3^3} = \left(\frac{15}{3}\right)^3 = 5^3$ e) $2^{10} \cdot 5^{10} = 10^{10}$ f) $\frac{12^5}{3^5 \cdot 4^5} = \frac{12^5}{12^5} = 1$

g) $(a^6 \cdot a^3)^2 : (a^2 \cdot a^4)^3 = (a^9)^2 : (a^6)^3 = a^{18} : a^{18} = 1$

h) $(6^2)^3 \cdot 3^5 \cdot (2^7 \cdot 2^2) = 6^6 \cdot 3^5 \cdot (2^9) = 6^6 \cdot 3^5 \cdot 2^9 = 6^{11}$

Figura 4. Ejemplo del apartado de Ejercicios en el cuaderno

S-Solución de problemas

En este apartado de Solución de Problemas, se propone un formato de división del problema en partes, incluyendo la lectura atenta del enunciado y apunte de **datos** e incógnitas, el **planteamiento** y **resolución** del problema, la **indicación verbal** del resultado y su **comprobación**.

La realización de una plantilla horizontal que incluya estos apartados ayuda al alumno a seguir estos pasos. En esta plantilla, se utilizan tres encabezados que corresponden a cada una de las partes detalladas en el párrafo anterior (datos, planteamiento/resolución, indicación verbal/comprobación) y un primer encabezado (#) para apuntar la página y número del problema.

La Figura 5 muestra la primera página del apartado de Solución de problemas de un cuaderno de 1º de la ESO con cada una de las divisiones pedidas. (En este caso, el problema corresponde con el siguiente enunciado: "Un camión de reparto transporta 15 cajas de refresco de naranja y 12 cajas de limón. ¿Cuántas botellas lleva en total si cada caja contiene 24 unidades?")



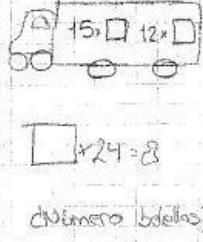
	DATOS	PLANTEAMIENTO/RESOLUCIÓN	INDICACIÓN VERBAL
Págs. 39, 25 (tema) Carlos		Método 1: $15 \cdot 24 = 42 \cdot 24 = 360 + 288 = 648$ Método 2: $(15 + 12) \cdot 24 = 27 \cdot 24 = 648$ <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div> $\begin{array}{r} 24 \\ \times 15 \\ \hline 120 \\ 240 \\ \hline 360 \end{array}$ </div> <div> $\begin{array}{r} 24 \\ \times 12 \\ \hline 48 \\ 240 \\ \hline 288 \end{array}$ </div> <div> $\begin{array}{r} 27 \\ \times 24 \\ \hline 108 \\ 540 \\ \hline 648 \end{array}$ </div> </div>	El camión transporta 648 bodegas.

Figura 5. Primera página apartado de Solución de problemas

En el currículo de matemáticas de Secundaria se valora “la forma de enfrentarse a tareas de resolución de problemas, ... Se evalúa desde la comprensión del enunciado a partir del análisis de cada una de las partes del texto y la identificación de los aspectos más relevantes, hasta la aplicación de estrategias simples de resolución, así como el hábito y la destreza necesarias para comprobar la solución. Se trata de evaluar, asimismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones y la confianza en la propia capacidad para lograrlo, y valorar la capacidad de transmitir con un lenguaje adecuado, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros.”

En los ensayos clásicos sobre resolución de problemas matemáticos aparecen estas estrategias y técnicas. Así, Polya propone cuatro fases; es decir, comprensión del problema, confección de un plan, ejecución de un plan, revisión del problema (Polya, 1965, p. 26). Miguel de Guzmán reformula estas fases en su modelo con cuatro pasos; que son, familiarizarse con el problema, buscar la estrategia adecuada, seguir dicha estrategia y revisar el proceso y sacar consecuencias de él (Guzmán, 1994, pp. 139-140).

Las primeras resoluciones de problemas pueden ser sugeridas por el profesor, bien en la pizarra (la distribución de la misma favorece precisamente este formato horizontal), bien a través de plantillas, para que el alumno se acostumbre al formato pedido.

En la Figura 6 se presentan una plantilla para varios problemas de enteros de 2º de la ESO.

Los enunciados² de la plantilla de la Figura 6 son los siguientes:

- Problema 0: Considerando que el año escolar tiene treinta semanas, y la asignatura de matemáticas se imparte durante cuatro días a la semana, que el libro de texto tiene 300 páginas. ¿Cuál es el ritmo de páginas diarias que hay que seguir para impartir la asignatura?
- p. 24,101: Calcular la cotización final de la bolsa semanal cuyas variaciones vienen dadas en la tabla.
- p. 24,100: Pitágoras nace en el 585 a.C. y muere en el 495 a.C. ¿Cuántos años vivió?
- p. 24,103: Una plataforma petrolífera tiene la base a 350 metros de profundidad en el mar y su punto más alto a 23 m sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la altura de la plataforma?

² Los enunciados de estos problemas pertenecen al libro de matemáticas de 2º de la ESO de la Editorial Bruño

#	DATOS	PLANTEAMIENTO	RESOLUCIÓN	INDICACIÓN RESULTADO COMPROBACIÓN
0	Planificación asignatura <div> <div>Semanas/año</div> <div>30</div> </div> <div> <div>Días/semana</div> <div>4</div> </div> <div> <div>Páginas/año</div> <div>300</div> </div> <div> <div>Páginas/día</div> <div>?</div> </div>	Calculamos los días/año como $30 \frac{\text{semanas}}{\text{año}} \cdot 4 \frac{\text{días}}{\text{semana}}$ Calculamos páginas/día como $\frac{300 \frac{\text{páginas}}{\text{año}}}{\frac{\text{días}}{\text{año}}}$	$30 \frac{\text{semanas}}{\text{año}} \cdot 4 \frac{\text{días}}{\text{semana}} = 120 \frac{\text{días}}{\text{año}}$ $\frac{300 \frac{\text{páginas}}{\text{año}}}{120 \frac{\text{días}}{\text{año}}} = 2'5 \frac{\text{pág}}{\text{día}}$	El ritmo de explicación diaria de la asignatura ha de ser 2'5 pág./día. En efecto, $2'5 \frac{\text{pág}}{\text{día}} \cdot 4 \frac{\text{días}}{\text{semana}} \cdot 30 \frac{\text{semanas}}{\text{año}} = 300 \frac{\text{páginas}}{\text{año}}$
p.24 101	COTIZACIÓN SEMANAL BOLSA <div> <div>I</div> <div>1°</div> <div>2°</div> <div>3°</div> <div>4°</div> <div>5°</div> <div>F</div> </div> <div> <div>34</div> <div>-2</div> <div>1</div> <div>-1</div> <div>2</div> <div>-1</div> <div>?</div> </div> <div>I - inicial, F - Final</div>	La cotización final de la semana en bolsa se calcula como la suma de la cotización inicial y las variaciones.	$34 + (-2) + 1 + (-1) + 2 + (-1) = 34 - 2 + 1 - 1 + 2 - 1 = (34 + 2 + 1) - (2 + 1 + 1) = 37 - 4 = 33$	La cotización final en bolsa en la semana es de 33 euros
p.24 100	¿Años? PITÁGORAS <div> <div>NACE</div> <div>Vida?</div> <div>MUERE</div> </div> <div> <div>585 a.C</div> <div>485 a.C</div> <div>0</div> </div>	Los años de vida se calculan restando la fecha de la muerte de la del nacimiento	$-485 - (-585) = -485 + 585 = 90$	Pitágoras vivió 90 años $(-585 + 90 = -495)$
p.24 103	¿Altura plataforma peholifera? (Cotas en m) <div> <div>23 m</div> <div>NM</div> <div>-350 m</div> </div>	La altura de la plataforma se calcula como diferencia entre su cota más alta y la más baja.	$\text{altura} = 23 - (-350) = 23 + 350 = 373$ (Cotas en metros)	La altura de la plataforma es 373 m En efecto, $-350 + 373 = 23$

Tema 1: Problemas de enteros

Figura 6. Plantilla de Solución de problemas de enteros

La plantilla de la Figura 6 sirve para introducir **sistemas de representación tabular, axial y gráficos** en los problemas e indicaciones para completar cada uno de los pasos sugeridos por la plantilla (datos, planteamiento-resolución, indicación verbal y comprobación).

En el apartado de planteamiento y resolución de problemas, se insiste en utilizar varios **métodos de resolución** del mismo problema, cuando esto sea posible.

Como ejemplo, en el problema de la Figura 7, la alumna propone tres métodos de resolución. Otro apunte interesante en la resolución de este problema es el uso del **diagrama de árbol** para representar los datos y resolver el problema

El enunciado de dicho problema³ es el siguiente: “En una feria de ganado se cataloga el ganado bovino según el sexo (machos o hembras), la edad (joven o adulto) y la raza (charolesa, serrana, avileña, retinta). ¿Cuántas etiquetas diferentes se deben confeccionar, combinando todas estas características, para catalogar a cualquier res que se presente en la feria?”

³ Tanto este enunciado como el resto de los problemas de esta sección hasta el final, además del de la figura 7, corresponden al libro de la editorial Anaya (J.Cólera e I.Gaztelu) de 1º y 3º de la ESO que es el que se utilizó como libro base de la asignatura.



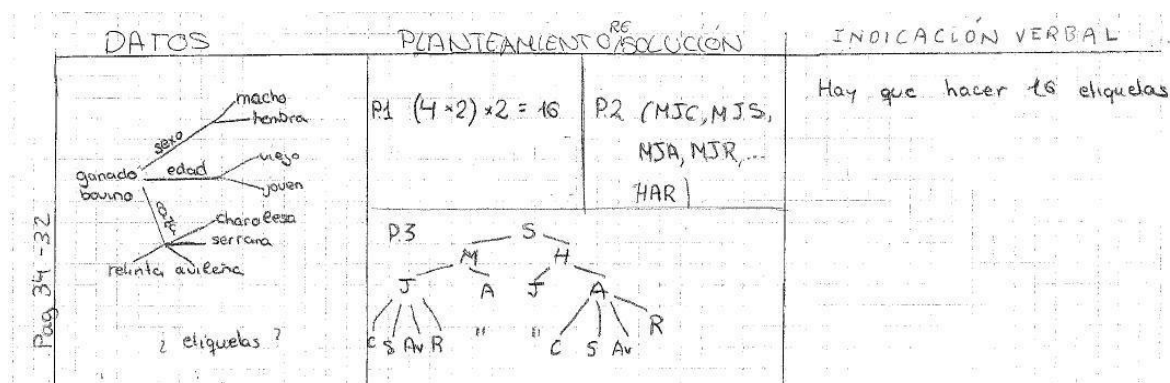


Figura 7. Representaciones de los datos en diagrama de árbol / Métodos alternativos de resolución

Otro sistema de representación a la hora de codificar la información del problema es el **sagital** para indicar situaciones de ingresos o pagos, vaciados y llenados, ...

En la Figura 8 se ilustra el uso de las flechas para apuntar los datos de un típico problema de garrafas que se ha resuelto numéricamente utilizando además dos representaciones tabulares.

(El enunciado del problema es el siguiente: “En una garrafa hay doble de cantidad de agua que en otra. Si sacáramos 5 litros de cada una, la segunda quedaría con el triple de agua que la segunda. ¿Cuántos litros hay en cada garrafa?”)

DATOS

V_1, V_2 : volúmenes de la garrafa 1 y 2

¿ V_1, V_2 ?

PLANTEAMIENTO

INDICACIÓN
RESULTADO

En cada garrafa

hay 20 l. de agua

y 10 l. de agua

V_1	2	10	16	<u>20</u>	30	40
V_2	1	5	8	<u>10</u>	15	20

V_1	-	5	11	<u>15</u>	25	35
V_2	-	0	3	<u>5</u>	10	15

En efecto, 20 es el doble de 10, 15 es el triple de 5.

Figura 8. Ejemplo de uso de las flechas para representar un problema de garrafas

La plantilla de resolución de problemas sirvió como excusa para la aplicación de un método de aprendizaje cooperativo. En este caso, se proponen dos problemas a la clase relacionados con la divisibilidad, asignando un problema a cada uno de los grupos en que se ha dividido la clase.

Se trata de que cada grupo elabore su propia respuesta al problema, que luego será revisado y maquettato conjuntamente por otros dos grupos que se realizan en la clase del taller de matemáticas. En este sentido, esta experiencia tiene similitudes con algunas de las normas del método de Small Group Learning and Teaching in Mathematics (Serrano, 2008, pp.105-106).

El primer problema que se planteó tenía el siguiente enunciado: “Un grupo de 60 niños, acompañados de 36 padres, acuden a un campamento de la montaña. Para dormir, acuerdan ocupar

cada cabaña con el mismo número de personas. Además, cuantas menos cabañas ocupen menos pagan. Por otro lado, ni los padres quieren dormir con niños ni los niños con padres. ¿Cuántos entrarán en cada cabaña?”

En la Figura 9a la derecha se muestra la interesante aportación de una de las alumnas (Inés) que tradujo visualmente la incompatibilidad de padres e hijos para compartir la misma tienda y el acuerdo de ocupación mínima.

Otro alumno dibujó un campamento tal como se muestra en la parte izquierda de la Figura9.

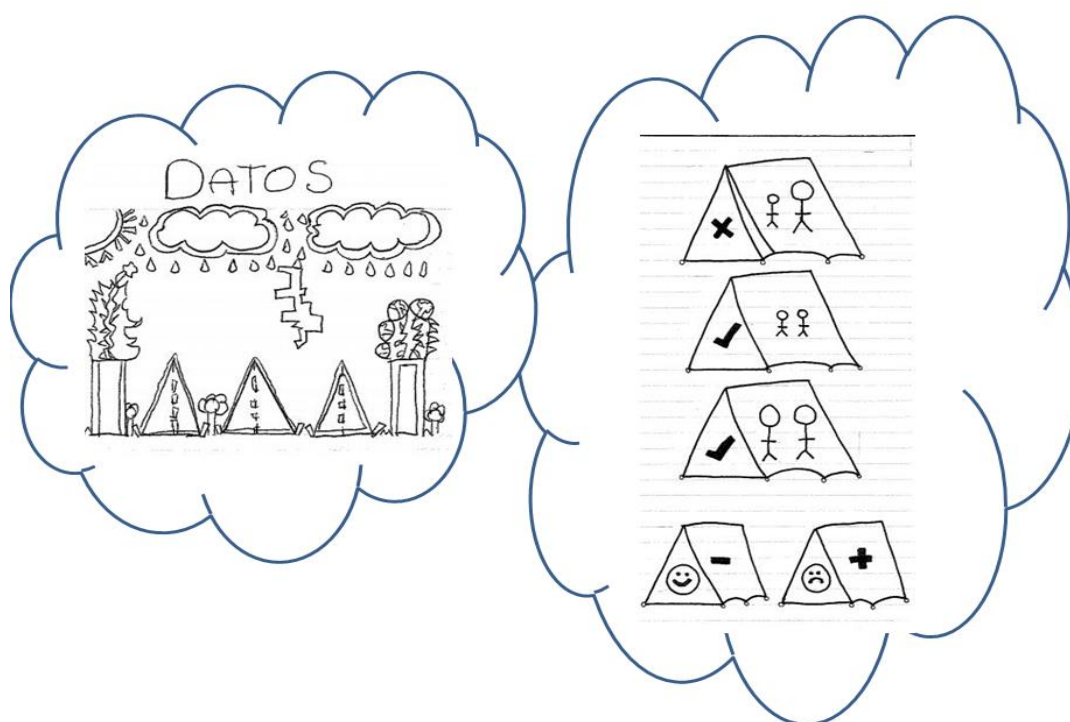


Figura 9. Traducción visual de los datos del problema de la cabaña

Incidiremos ahora en la utilización de dibujos como elementos de apoyo en la resolución de problemas. El pensamiento visual consiste precisamente en “resolver problemas mediante dibujos” (Roam, 2010, p. 5).

Más adelante, el autor hace la siguiente reflexión: “Imagine que entra en un aula de preescolar donde los niños tienen seis años y pide (con autorización de la maestra) que levanten la mano los niños que saben cantar. Todos levantan la mano. ¿Cuántos saben dibujar? Todas las manos. Ahora pregunte cuántos saben leer: se levantará quizás un par de manos. Y luego entra en un salón de cuarto de ESO y hágaless a los niños de 16 años las mismas preguntas: ¿Cuántos de ellos saben bailar? Unos pocos. ¿Cuántos saben dibujar? Un par. Ahora pregunte cuántos saben leer. Se levantará todas las manos” (Roam, 2010, p. 263).

En la resolución del problema, la mayoría de los alumnos optaron por el cálculo de los divisores del número de adultos y niños del campamento para calcular a partir de dichos divisores el máximo común divisor.



En la Figura 10 se reproduce la solución de una alumna en que se ha realizado exhaustivamente el cálculo de estos divisores.

Planteamiento / Resolución																	
60		1	60		2	60		3	60		4	60		5	60		6
0	60	0	30	0	20	0	15	0	12	0	10						
60		60	60		30	60		20	60		15	60		12	60		10
0	1	0	2	0	3	0	4	0	5	0	6						
36		1	36		2	36		3	36		4				36		6
0	36	0	18	0	12	0	9							0	6		
36		36	36		18	36		12	36		9				36		6
0	1	0	2	0	3	0	4							0	6		
Divisores de 60 \rightarrow 1, (2), (3), (4), 5, (6), 10, (12), 15, 20, 30 , 60 Divisores de 36 \rightarrow (1), (2), (3), (4), (6), 9, (12), 36																	
$\max cd(60, 36) = 12$																	

Figura 10 Resolución del problema del campamento por el método artesanal

En la Figura 11 se combinan las aportaciones más notables de los alumnos y revisado por otros alumnos dentro del taller de matemáticas. Se han completado las aportaciones de los alumnos con otros dos métodos de cálculo del máximo común divisor explicados en clase.


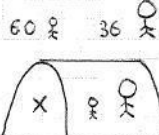

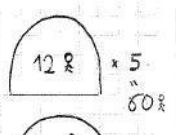
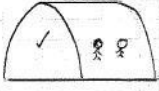
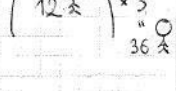


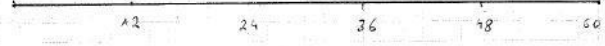
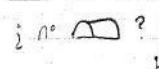

#	DATOS	PLANTEAMIENTO RESOLUCIÓN	INSERCIÓN RESULTADO COMPROBACIÓN
		MÉTODO ARTESANAL $\max cd(60, 36) = 12$ En todos los métodos se trata de calcular el $\max cd(60, 36)$ $D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ $D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$	En cada cabana Hay 12 personas Hay 8 cabanas
			
		$\max cd(60, 36)$ $2 \cdot 3$ \uparrow	
		MÉTODO ÓPTIMO $60 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$	REALIZADO POR: Ines, Alicia V., Diana, María T.
		MÉTODO GRÁFICO 	REVISADO POR: Julia, Alejandra, María Teresa
			PROFESOR: Andrés

Figura 11. Ejemplo plantilla de resolución problemas cooperativo (máximo común divisor)

Otro problema (en este caso de múltiplos) que se propuso tiene el siguiente enunciado: “Las participantes en un desfile pueden colocarse, para desfilar, de 3 en 3, de 5 en 5 o de 25 en 25; pero no pueden hacerlo de 4 en 4 ni de 9 en 9. ¿Cuál es el número de participantes si sabemos que está entre 1000 y 1250?”

De manera similar al problema anterior, un alumno (Daniel) traduce visualmente las condiciones numéricas del enunciado utilizando pictogramas, tal como se aprecia en la parte de datos de la Figura 12. También es de destacar la comprobación numérica que hace del resultado del problema, que también se muestra en la figura

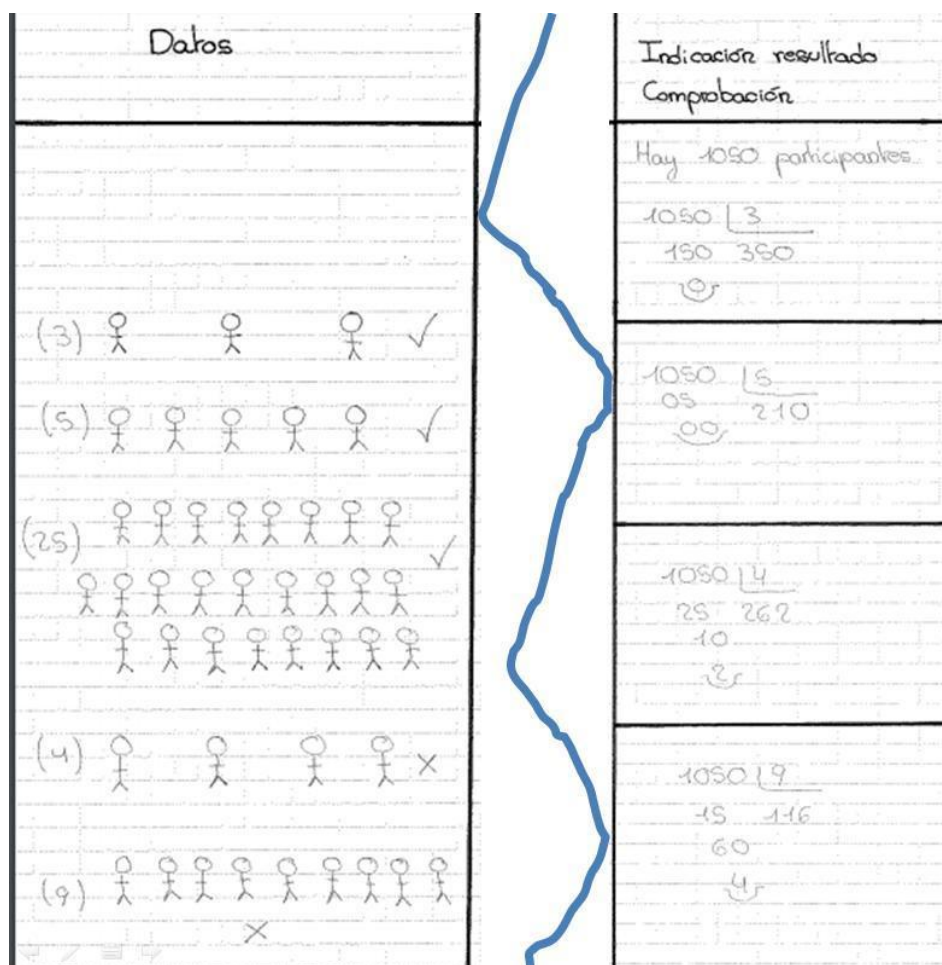


Figura 12. Traducción visual datos problema desfile / Comprobación

En las resoluciones, varias han sido las alternativas propuestas por los alumnos. La solución más rápida es la que se presenta en la Figura 13 propuesta por Laura

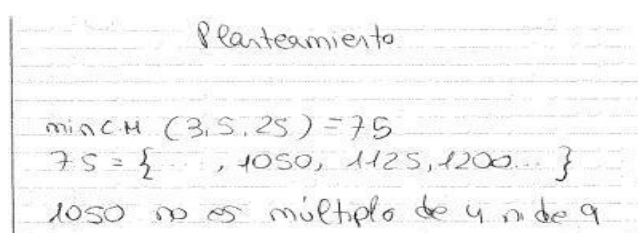


Figura 13. Un método de resolución del problema del desfile (mínimo común múltiplo)



Otra alumna (Lucía) ofrece (ver Figura 14) un método de resolución menos directo.

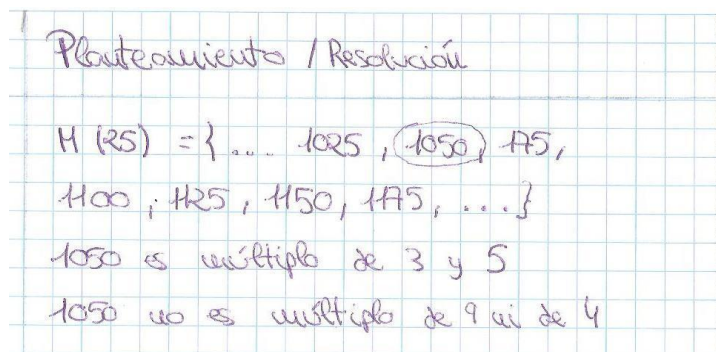


Figura 14. Otro método de resolución del problema del desfile (mínimo común múltiplo)

Elisa opta por una solución exhaustiva buscando los múltiplos de 3, 5 y 25 que verifiquen la condición del enunciado. En la Figura 15 se muestra el detalle de esta solución.

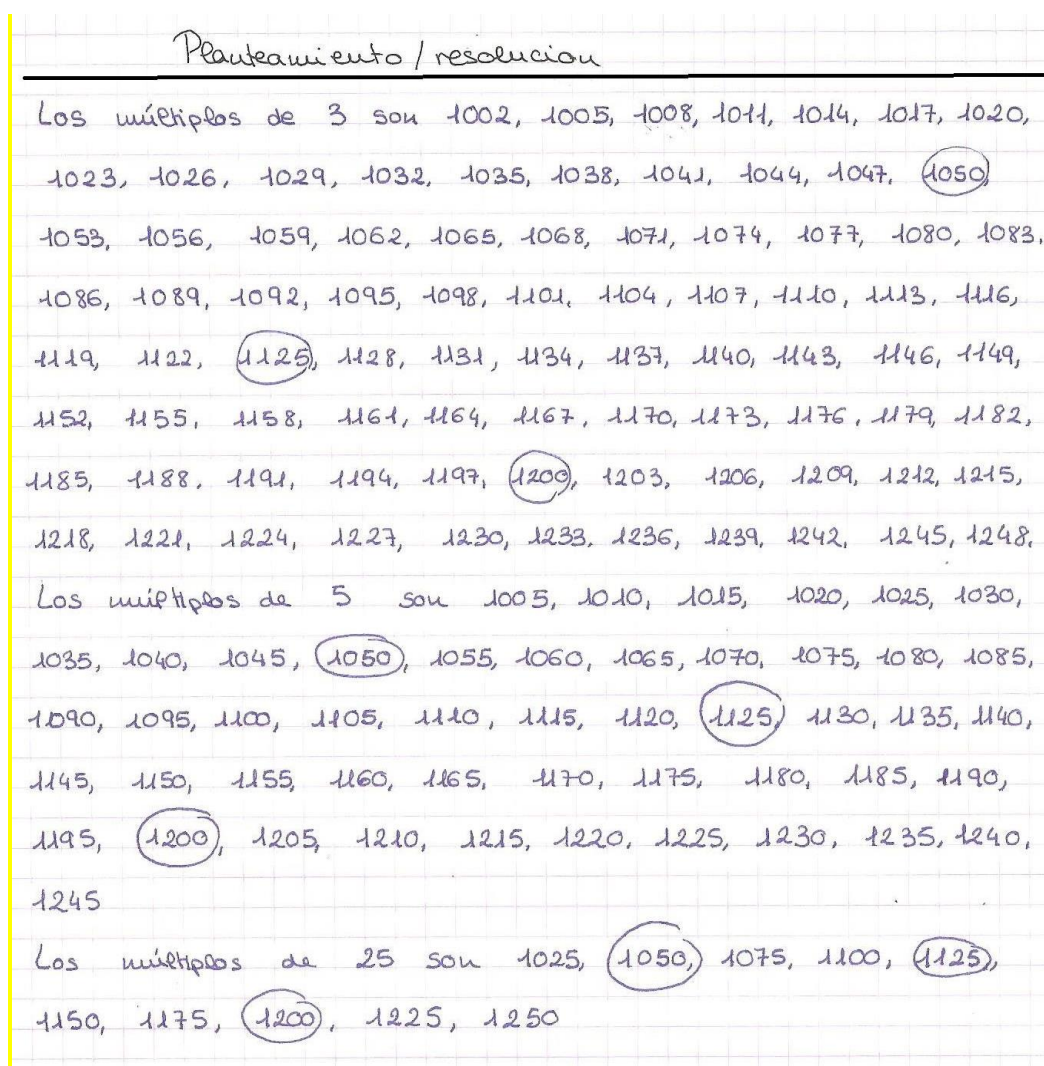


Figura 15. Otro método de resolución del problema del desfile (mínimo común múltiplo)

La Figura 16 muestra la maquetación de todas las aportaciones con la revisión de los alumnos y profesor.

#	DATOS	PLANTEAMIENTO/RESOLUCIÓN	INDICACIÓN RESULTADO COMPROBACIÓN
74, 26	Desfile 88888888 88888888 88888888	Método 1 El número de personas en el desfile es múltiplo de 3, 5 y 25 luego es múltiplo del mínimo común múltiplo de 3, 5 y 25 $\text{mcm}(3, 5, 25) = 75$ $75 = \{ \dots, 1050, 1125, 1200, \dots \}$ De los tres múltiplos 1200 es múltiplo de 4 y 1125 es múltiplo de 9 y 1050 no lo es	En el desfile hay 1050 participantes $\begin{array}{r} 1050 \div 3 = 350 \\ 1050 \div 5 = 210 \\ 1050 \div 25 = 42 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1050 \div 4 = 262 \text{ resto } 2 \\ 1050 \div 9 = 116 \text{ resto } 6 \end{array}$
	8888 (...) 8888 ✓ 88888888 (...) 88888888 ✓ 258 (...) 258 ✓	Método 2 $25 > 3, 25 > 5$ $25 = \{ 1025, 1050, 1075, 1100, 1125, 1150, 1175, \dots \}$ Solo 1050 es múltiplo de 3 y 5 y no lo es de 4 y 9	8888 ... (350) ... 8888 8888888 ... (210) ... 8888888 258 ... () ... 258
	88888888 (...) 88888888 x 98 (...) 98 x	Método 3 $3 = \{ \dots, 1002, 1005, \dots, 1050, \dots, 1146, 1149, \dots \}$ $3 \cap 5 = \{ \dots, 1005, 1020, \dots, 1050, \dots, 1230, 1245, \dots \}$ $3 \cap 5 \cap 25 = \{ \dots, 1050, 1125, 1200 \}$ De los anteriores 1125 y 1200 se excluyen por ser múltiplos de 25 y 4 respectivamente	88888888 ... (262) ... 88888888 98 ... (116) 98 8888
	1000 < ? < 1250 ?		REALIZADO POR: Ana Rosa Laura, Lucía, Daniel, Elisa REVISADO POR: Alejandra, Jue PROFESOR: Andrés

Figura 16. Ejemplo plantilla de resolución problemas cooperativo (mínimo común múltiplo)

En el siguiente ejemplo (ver Figura 17) se ilustran las posibilidades de la cuadrícula para comprobar la solución de un típico problema geométrico cuyo enunciado es el siguiente: “Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en 147 cm^2 . ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?”


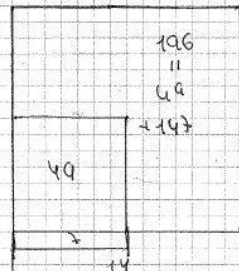
#	DATOS	Planteamiento/Resolución	Indicación del resultado
105, 46		Método algebraico $(2x)^2 = x^2 + 147$ $4x^2 = x^2 + 147 \rightarrow 3x^2 = 147 \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow x = 7$ $3x^2 + 0x - 147 = 0 \rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-147)}}{2 \cdot 3}$ $x = \frac{\sqrt{1764}}{6} = \frac{42}{6} = 7$	El lado del cuadrado es 7 cm 

Figura 17. Uso de la cuadrícula para comprobación de un problema geométrico

Las posibilidades de la cuadrícula en el cuaderno de matemáticas, merecen un comentario aparte. Además de la comprobación geométrica del problema de áreas anterior, la cuadrícula simplifica la misma división del formato de la hoja en partes (ver dicha división en cualquiera de los ejemplos de las figuras), la representación de la recta numérica y las coordenadas en los ejes cartesianos y varios usos más.



Así, en el siguiente problema de fracciones (ver Figura 18) de 3º de la ESO se utiliza la cuadrícula del cuaderno como método gráfico alternativo al método algebraico de resolución.

Asimismo, en este problema es interesante apreciar la representación del diagrama de árbol para el apunte de datos y la codificación de parte de los datos del problema utilizando **pictogramas**.

(El enunciado que corresponde a este problema es el siguiente: “De los socios de un club deportivo, los $\frac{2}{5}$ juegan al fútbol, $\frac{1}{3}$ de los que quedan, al baloncesto; 28 al balonmano, aún quedan $\frac{1}{6}$ que hacen atletismo. ¿Cuántos socios son?”)

#	DATOS	PLANTEAMIENTO	INDICACION VERBAL COMPROBACION
Ejemplo problema ecuaciones de 1º grado con denominador 10, 12, 30	<p>Club deportivo</p> <p>¿Número socios?</p>	<p>Método algebraico $x \rightarrow$ socios club</p> <p>$\frac{2}{5}x \rightarrow$ Resto $= (1 - \frac{2}{5})x = \frac{3}{5}x$</p> <p>$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}x = \frac{x}{5} \rightarrow$ Queda: $x - \frac{2}{5}x - \frac{x}{5} = \frac{2x}{5}$</p> <p>28</p> <p>$\frac{2}{5}x - 28 = \frac{1}{6}x$; $\frac{12x}{30} - \frac{28 \cdot 30}{30} = \frac{5x}{30}$</p> <p>$12x - 28 \cdot 30 = 5x$; $7x = 28 \cdot 30$; $x = 120$</p>	<p>El club tiene 120 socios</p> <p>Comprobación</p> <p>$\frac{2}{5} \cdot 120 = 48$</p> <p>$\frac{1}{3} \cdot 120 = 24$</p> <p>28</p> <p>$\frac{1}{6} \cdot 120 = 20$</p> <p>Total 120</p>
	<p>Claves</p> <p> practica fútbol</p> <p> practica baloncesto</p> <p> practica balonmano</p> <p> practica atletismo</p>	<p>Método gráfico $\min cm(5, 6, 3) = 30$</p> <p>El número de socios se calcula $(28 : 7) \cdot 30 = 120$</p>	<p>¡</p>

Figura 18. Uso de pictogramas, diagramas de árbol y cuadrícula en un problema de fracciones

En la Figura 19 se presentan algunos problemas de ecuaciones de 1º de la ESO, con la división en pasos a las que el alumno se ve conducido por la plantilla de solución de problemas del cuaderno.

Los enunciados son los siguientes:

- p. 199,2: “Un número y su siguiente suman 53. ¿Qué números son?”
- p. 199,1: “Si a un número le sumas 15, obtienes el doble que si le restas. ¿Qué número es?”
- p. 199,4: “¿Cuántas vacas hay en una finca si contando cuernos y patas suman 88?”

#	DATOS	PLANTEAMIENTO / RESOLUCIÓN	INDICACIÓN VERBAL COMPROBACIÓN
Pág. 199, 1	<p>Número X</p> <p>Número -3 $X-3$</p> <p>Número $+15$ $x+15$</p> <p>Doble del número menos tres</p> <p>$2X?$</p>	<p>El número más 15 = 2 (Número -3)</p> <p>$x+15 = 2 \cdot (x-3)$</p> <p>$x+15 = 2x-6$, $15 = x-6$</p> <p>$15+6 = x$, $21 = x$</p>	<p>El número es 21</p> <p>$21+15 = 2 \cdot (21-3)$</p> <p>$36 = 2 \cdot 18$</p> <p>$36 = 36$</p>
Pág. 199, 2	<p>Número X</p> <p>Siguiente $X+1$</p> <p>Suma 53</p> <p>$2X?$</p>	<p>El número + Su siguiente = 53</p> <p>$x + (x+1) = 53$</p> <p>$2x+1 = 53$</p> <p>$2x = 52$</p> <p>$x = \frac{52}{2} = 26$</p>	<p>El número es 26</p> <p>$26 + 27 = 53$</p> <p>$153 = 531$</p>
Pág. 199, 4	<p>¿Vacas?</p> <p>Vacas X</p> <p>Cuernos $2x$</p> <p>Patas $4x$</p> <p>Suma 222</p>	<p>Cuernos + Patas = 222</p> <p>$2x + 4x = 222$</p> <p>$6x = 222$</p> <p>$x = \frac{222}{6} = 37$</p>	<p>El número de vacas es 37</p> <p>$2 \cdot 37 + 4 \cdot 37 = 222$</p> <p>$16 \cdot 37 = 2221$</p>

Figura 19. Solución de varios problemas de ecuaciones en todos los pasos

En el artículo se han reproducido resoluciones en el formato horizontal bien copiadas de la pizarra de los problemas resueltos por el profesor, bien hechos en casa como tarea, o bien maquetados a partir de las ideas de varios alumnos en una resolución grupal. Otro de los contextos, en que se han planteado este formato horizontal es el de los grupos interactivos tal como se describe en Martín (2018, pp.57-64). En esta experiencia, la clase se divide en grupos para la realización de cuatro tareas pilotadas por adultos. Una de las tareas consistía precisamente en la resolución de problemas en una plantilla horizontal.

Una de las críticas que pueden plantearse a la rúbrica es la aparente rigidez que impone la división en pasos del apartado de resolución de problemas. Por una parte, pareciera que este formato limita espacialmente los desarrollos de resolución al espacio compartimentado de una hoja. Pero el alumno puede utilizar varias hojas para la resolución de un mismo problema. Por otra parte, pareciera que el alumno esté obligado a seguir cada uno de los pasos señalados en la división en partes de la hoja y que se penalizara en la evaluación a alumnos que no siguieran cada uno de estos pasos. No se trata, sin embargo, con esta rúbrica de encorsetar las resoluciones alternativas de los problemas, de hecho cabe la posibilidad de plantear resoluciones alternativas tal como se ha mostrado en varios ejemplos, pero sí de que en las soluciones de los alumnos se observen los pasos clásicos de resolución de problemas.

Finalmente, damos aquí los criterios de calificación de este apartado del cuaderno:

- Se puntuará con una valoración de excelente (2) al cuaderno en que estén realizados todos o casi todos los problemas pedidos por el profesor y están divididos en cada uno de los pasos



(datos, planteamiento/resolución, indicación resultado/comprobación) aunque no estén explicitados. Se sugiere que dichos pasos encabecen la hoja en formato horizontal.

- Las puntuaciones de satisfactorio (1) y (0) son defectos más o menos penalizables de la valoración máxima anterior.

3. MATES: Valoración de la rúbrica y conclusiones

Esta propuesta de rúbrica para el cuaderno de matemáticas se ha puesto en marcha durante varios años.

Cuando a los alumnos se les presenta la rúbrica al principio de curso, al escribir en la pizarra las iniciales de cada uno de los apartados, anotar a la derecha el significado de cada inicial (**M**-Modelo cuaderno, **A**-Apuntes de clase, **T**-Trabajos matemáticos, **E**-Ejercicios, **S**-Solución de problemas) y explicar brevemente el contenido de cada apartado, que luego se les entregará en detalle con una copia impresa tal como aparece en la figura 1, no son pocos los alumnos que anticipan las últimas letras de la rúbrica e identifican sin que se les diga, cada una de las iniciales con la palabra con la que se conoce coloquialmente a la asignatura (MATES).

Esta anticipación y expectación por la rúbrica antes de que se les haya entregado, constituyen uno de las bondades de la misma. Los alumnos quieren conocer dicha rúbrica y expresan curiosidad por completar los apartados adecuadamente, al percibir el orden lógico que la rúbrica presenta.

Como rúbrica además, ofrece las ventajas inherentes a todo instrumento de este tipo, al ser herramienta de evaluación, clarificar los objetivos del profesor, permitir al estudiante conocer los **criterios de calificación** para que a su vez pueda evaluarse y revisar sus trabajos antes de entregarlos al profesor, proporcionar a los estudiantes una **retroalimentación** sobre sus puntos fuertes y débiles en los que deben mejorar, y reducir al mínimo la subjetividad en la evaluación (Martínez-Rojas, 2008, p.129).

Específicamente, destacamos la **versatilidad** pues la misma rúbrica sirve para las cuatro evaluaciones (incluida la inicial) de un mismo curso académico, para distintos cursos de un mismo nivel e incluso para distintos niveles dentro de una misma etapa (esta misma rúbrica se ha utilizado indistintamente para 1º, 2º y 3º de la ESO); la **autocontención** al constituir las iniciales de cada uno de los apartados de la rúbrica las iniciales de la denominación coloquial de la asignatura (MATES) y la **reivindicación del pensamiento visual** como ayuda y complemento para la resolución de problemas.

La presentación de esta rúbrica, ha servido para mostrar algunos de los problemas resueltos en clase a través de los cuadernos de los alumnos, incidiendo en aspectos como los **sistemas de representación** de la información (ejes, dibujos, flechas, tablas, diagramas de árbol, pictogramas, ...), la promoción de la **cuadrícula** y la **versatilidad** en la resolución del problema por métodos alternativos.

Como reflexión final, para la elaboración del artículo se han utilizado los cuadernos de varios alumnos. La excelencia tanto en el orden, el ajuste al formato, el gusto por una presentación ordenada y armónica, la calidad de las representaciones y sus distintos tipos y el buen hacer en el apunte de notas de clase, la realización de ejercicios y trabajos y la resolución de problemas que reflejan dichos cuadernos, es otra muestra de la bondad de la rúbrica.

Bibliografía

- Alsina, C. y otros (1998). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Editorial Grao.
- Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Guzmán, M. (1994). *Para pensar mejor*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Martín, A. (2018). Los Grupos Interactivos de Matemática en 1º de la ESO. *Revista UNO*, 79, 57-64
- Martínez-Rojas, J. (2008). Las rúbricas en la evaluación escolar: su construcción y su uso. *Avances en Medición*, 6, 129-138.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Méjico: Editorial Trías.
- REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- Roam, D. (2010). *Tu mundo en una servilleta. Resolver problemas y vender ideas mediante dibujos*. Barcelona: Gestión 2000 (Grupo Planeta).
- Serrano, J. y otros (2008). *Aprendizaje cooperativo en Matemáticas. Diseño de actividades en Educación Infantil, Primaria y Secundaria*. Universidad de Murcia: Servicio de Publicaciones.

Andrés Martín Sánchez Profesor Matemáticas I.E.S. Emilio Jimeno (Calatayud, Zaragoza). Funcionario de Carrera Ingeniero Industrial (ETSII de la UVA). Graduado en Matemáticas (UNED). (Experiencia profesional de 11 años como Ingeniero de I+D en el sector de la automoción). Publicaciones: Entorno Abierto 18, 19, 20 (Sociedad Aragonesa Profesores de Matemáticas), Revista Anales XX, XXI, XXII, XXIII (UNED Calatayud). Revista Suma 84- Matemáticas y Ajedrez en Secundaria (marzo 2017)
Email: amartin@emilijimeno.edu.es

